Bernardo Aceituno Cabezas

12-10764

Problema de la semana – semana 6 (Quiz 2)

1. Considere la señal:

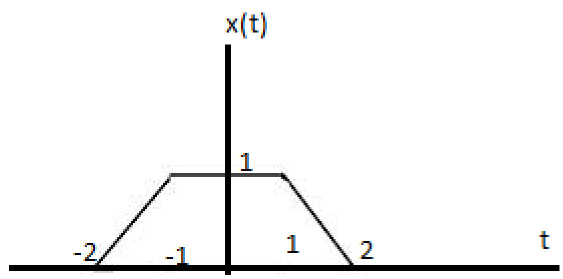
$$x(t) = \begin{cases} t+2 & -2 < t < -1 \\ 1 & -1 < t < 1 \\ -t+2 & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{todo lo demas} \end{cases}$$

y sea:

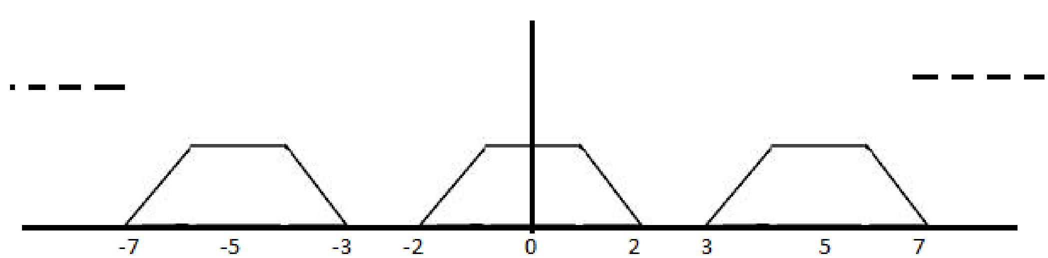
$$x1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-5k)$$

a. grafique *x(t)* y $x_1(t)$
b. Determine la transformada de Fourier X(jω) y X_1(jω). Grafique ambos espectros
c. Determine la serie de Fourier de $x_1(t)$.

a) Las gráficas son relativamente sencillas, x(t) representa un trapecio de base inferior 4 y base superior 2, es decir:



Ahora, X1(t) es una señal que repite el pulso de x(t) infinitamente con una separación de 5 unidades, es decir:



Notamos que es una señal periódica con T = 5.

b) Para la transformada de Fourier tenemos que aplicar definición:

$$X(\omega) = \int_{-2}^{-1} (t+2)e^{-j\omega t}dt + \int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}\, dt + \int_{1}^{2} (2-t)e^{-j\omega t}dt$$

Integramos:

$$X(\omega) = \left(\frac{(t+2)e^{-j\omega t}}{-j\omega} + \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2}\right|_{-2}^{-1} + \left(\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-1}^{1} + \left(\frac{(2-t)e^{-j\omega t}}{-j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2}\right|_{1}^{2}$$

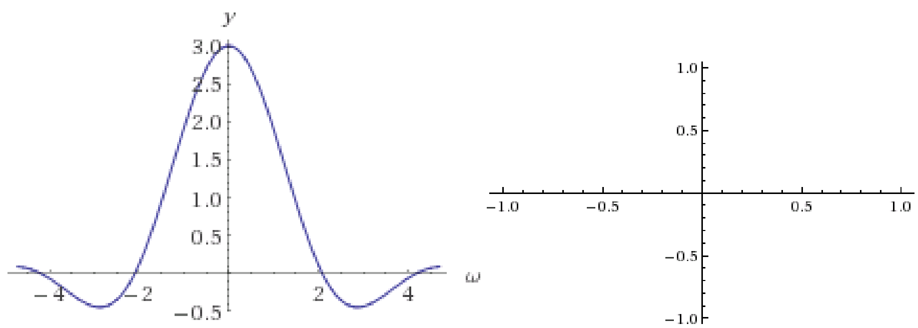
Si evaluamos todo y recordamos que:

$$\frac{e^{-\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \cos(\omega t)$$

Entonces tendremos que:

$$\boxed{X(\omega) = \frac{2\cos(\omega) - 2\cos(2\omega)}{\omega^2}}$$

Notamos que la transformada es real, algo propio de las señales pares. Ahora, el espectro de la señal será:



Espectros de magnitud y fase de X(ω) (fase igual a cero)

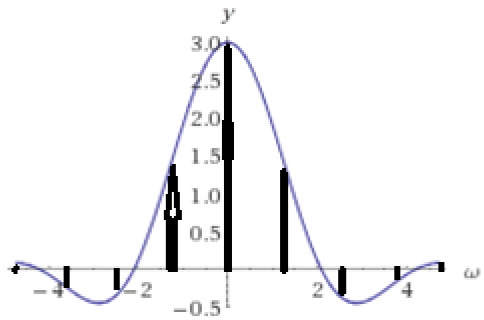
Ahora, para X1(t), sabemos por tabla que para una señal periódica su transformada de Fourier será un tren de impulso (envuelto por el espectro de la señal fundamental, x(t) en este caso) y su expresión estará dada por:

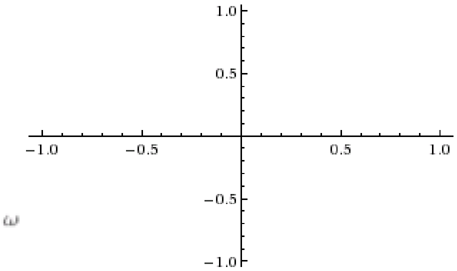
$$X1(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} 2\pi \frac{X\left(\frac{2\pi}{T}k\right)}{T} \delta(t - \frac{2\pi}{T}k)$$

Sustituyendo en la expresión concluimos:

$$\boxed{X1(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} 5\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right) - \cos(\frac{4\pi}{5}k)}{\pi k^2} \delta(t - \frac{2\pi}{5}k)}$$

Ahora el espectro de magnitud será un tren de impulso envuelto por X(ω) y su espectro de fase será cero por ser una transformada real (de nuevo porque la señal es par):





Espectros de magnitud y fase de X1(ω)

c) Ahora, sabemos que para una señal periódica, cuya representación en un periodo es x(t), con transformada de Fourier x(ω) se cumple que sus coeficiente de Fourier se pueden escribir como:

$$a_k = \frac{X(\frac{2\pi k}{T})}{T}$$

Ahora, notemos que la señal es par, de allí por la propiedad vista en clase, su serie de Fourier es una suma de cosenos dada por:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right)$$

De la parte (b) ya sabemos que:

$$a_k = \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right) - \cos(\frac{4\pi}{5}k)}{\frac{2k^2\pi^2}{5}}$$

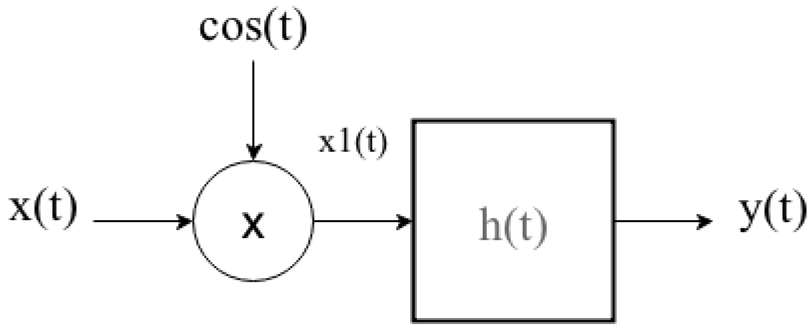
Luego para a_0 tenemos:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x1(t)dt = \frac{1}{5}\big(area\ bajo\ la\ curva\ de\ x(t)\big) = \frac{3}{5}$$

Finalmete:

$$\boxed{x(t) = \frac{3}{5} + \sum_{k=1}^{\infty} 5\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right) - \cos(\frac{4\pi}{5}k)}{\pi^2 k^2}\cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right)}$$

2. En la figura se muestra un sistema de modulación y transmisión de una señal que multiplica la señal y luego la pasa por un LTI.



Si se sabe que $X_1(j\omega)$ = U(ω+2) - U(ω-2) y y(t) =$\int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)}x(\tau-1)d\tau$ .Calcule ***x(t)*** y ***y(t)***

Para empezar tenemos que:

$$TF\{x(t)cos(t)\} = \frac{1}{2\pi}(X(\omega) * \pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)])$$
$$= \frac{1}{2}[\mathrm{X}(\omega) * \delta(\omega+1) + \mathrm{X}(\omega) * \delta(\omega-1)]$$

Si recordamos propiedades del impulso

$$f(t) * \delta(t-a) = f(t-a)$$

De allí

$$TF\{x(t)cos(t)\} = \frac{1}{2}X(\omega+1) + \frac{1}{2}X(\omega-1) = X1(\omega) = \mathrm{U}(\omega+2) - \mathrm{U}(\omega-2)$$

Inmediatamente notamos que:

$$X(\omega) = 2u(\omega+1) - 2u(\omega-1) = \begin{cases} 2, & |\omega| \le 1 \\ 0\,, & |\omega| > 1 \end{cases}$$

Aplicando linealidad y recordando la transformada de tabla

$$F(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le W \\ 0\,, & |\omega| > W \end{cases} \Rightarrow f(t) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$$

De allí por linealidad de la transformada, la señal de entrada es:

$$\boxed{x(t) = 2\frac{\sin(t)}{\pi t}}$$

Por otro lado, tenemos que si aplicamos la misma propiedad podemos obtener x1(t), de alli:

$$x_1(t) = \frac{\sin(2t)}{\pi t}$$

Luego de allí calculamos y(t):

<u>Método 1</u>

Tenemos que se puede obtener y(t) directamente de la expresión dada en el enunciado del problema, si sustituimos x1(t) allí obtenemos:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)}\frac{sin(2\tau-2)}{\pi t}d\tau}$$

Método 2

Podemos calcular la respuesta al impulso h(t) y hacer su convolución con x1(t), en este caso:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x(\tau - 1) d\tau \,) = e^{-2(t-1)} u(t-1)$$

de allí:

$$y(t) = h(t) * x_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(\tau-1)} u(\tau - 1) \frac{\sin(2(t-\tau))}{\pi(t-\tau)} d\tau$$

Y entonces concluimos:

$$\boxed{y(t) = \int_{1}^{\infty} e^{-2(\tau-1)} \frac{\sin(2(t-\tau))}{\pi(t-\tau)} d\tau}$$

Método 3

Podemos calcular la salida en el dominio de la frecuencia, sabemos que por ser una función exponencial desplazada, recordemos que:

$$TF\{f(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

Y que

$$TF\{e^{-at} u(t)\} = \frac{1}{a + j\omega}$$

Si aplicamos lo anterior obtenemos que:

$$TF\{h(t)\} = H(\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{2 + j\omega}$$

De allí, sabemos que:

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) \Rightarrow Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$$

De allí en el dominio de la frecuencia:

$$Y(\omega) = [\mathrm{U}(\omega + 2) - \mathrm{U}(\omega - 2)] \frac{e^{-j\omega}}{2 + j\omega} = \begin{cases} \dfrac{e^{-j\omega}}{2 + j\omega}, |\omega| \leq 2 \\ 0, |\omega| > 2 \end{cases}$$

De allí si aplicamos transformada inversa:

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} \frac{e^{-j\omega}}{2 + j\omega} e^{j\omega t} d\omega}$$